全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

# 全品学练考

主编 肖德好

## 导学案

## 高中数学

基础版

选择性必修第三册

数智教辅

-全品AI学伴-

7×24小时有问必答

高效预复习，吃透每一课

长江出版传媒
崇文書局

# CONTENTS 目录 导学案


## 06 第六章 计数原理 PART SIX

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 …… 107
第 1 课时 两个计数原理及简单应用 …… 107
第 2 课时 两个计数原理的综合应用 …… 109
6.2 排列与组合 …… 111
6.2.1 排列 …… 111
6.2.2 排列数 …… 113
第 1 课时 排列数及简单应用 …… 113
第 2 课时 排列的综合问题 …… 114
6.2.3 组合 …… 116
6.2.4 组合数 …… 116
第 1 课时 组合与组合数公式 …… 116
第 2 课时 组合的综合应用 …… 119
6.3 二项式定理 …… 122
6.3.1 二项式定理 …… 122
第 1 课时 二项式定理及二项展开式的通项 …… 122
第 2 课时 三项展开式问题及二项展开式的应用 …… 124
6.3.2 二项式系数的性质 …… 125
本章总结提升 …… 127

## 07 第七章 随机变量及其分布 PART SEVEN

7.1 条件概率与全概率公式 …… 130
7.1.1 条件概率 …… 130
第 1 课时 条件概率与乘法公式 …… 130
第 2 课时 条件概率的性质及应用 …… 132
7.1.2 全概率公式 …… 133
7.2 离散型随机变量及其分布列 …… 135
7.3 离散型随机变量的数字特征 …… 139
7.3.1 离散型随机变量的均值 …… 139
7.3.2 离散型随机变量的方差 …… 141
7.4 二项分布与超几何分布 …… 144
7.4.1 二项分布 …… 144
第 1 课时 二项分布 …… 144
第 2 课时 二项分布的均值与方差 …… 147
7.4.2 超几何分布 …… 149
7.5 正态分布 …… 152
本章总结提升 …… 155

## 08 第八章 成对数据的统计分析 PART EIGHT

8.1 成对数据的统计相关性 …… 160
8.2 一元线性回归模型及其应用 …… 163
第 1 课时 一元线性回归模型及最小二乘估计 …… 163
第 2 课时 非线性回归模型 …… 166
8.3 列联表与独立性检验 …… 167
本章总结提升 …… 171

◆ **参考答案**（单独成册） …… 177

# 第六章　计数原理

## 6.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

### 第 1 课时　两个计数原理及简单应用

【学习目标】

1. 通过实例，理解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义.
2. 正确地理解“完成一件事情”的含义，能根据具体问题的特征，选择“分类”或“分步”.
3. 能根据具体问题的特征，选择两种计数原理解决一些实际问题，发展数学建模和数学运算的核心素养.

## 课堂明新知

知识导学　典例探究

### ◆ 要点一　分类加法计数原理

定义：完成一件事有_____不同方案，在第 1 类方案中有_____种不同的方法，在第 2 类方案中有_____种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

如果完成一件事情有 $n$ 类不同方案，在第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 类中有 $a_k$ 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同.　(　)

(2)在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能完成这件事.　(　)

### 典例解析

**例 1** (1)[教材 P5T1(1)改编] 一项工作可以用两种方法完成，有 4 人只会用第一种方法完成，有 3 人只会用第二种方法完成，另有 2 人两种方法都会，从中选择 1 人完成这项工作，则不同选法的种数是_____.

(2)在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数的个数为_____.

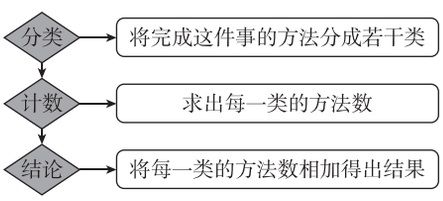
**变式** 某市的有线电视可以接收中央台 12 个频道、本地台 10 个频道和其他省市 46 个频道的节目.

(1)当这些频道播放的节目互不相同时，一台电视机共可以选看多少个不同的节目？

(2)如果有 3 个频道正在转播同一场球赛，其余频道正在播放互不相同的节目，一台电视机共可以选看多少个不同的节目？

[素养小结]

利用分类加法计数原理计数时的解题流程




[提醒] (1)确定分类标准时要确保每一类都能独立地完成这件事.

(2)检查所分类型是否包含所有情况，确保不重不漏.

## ◆ 要点二　分步乘法计数原理

定义：完成一件事需要_____步骤，做第 1 步有_____种不同的方法，做第 2 步有_____种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

如果完成一件事情需要 $n$ 个步骤，做第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 步有 $a_k$ 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

**【诊断分析】** 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分步乘法计数原理中，每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的.　(　)

(2)在分步乘法计数原理中，事情如果是分两步完成的，那么其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事，只有两个步骤都完成后，这件事情才算完成.　(　)

### 典例解析

**例 2** (1)现有 3 个班分别从 3 个景点中选择 1 个游览，不同选法的种数是　(　)

A. 27　　B. 9

C. 3　　D. 1

(2)[2026·江西景德镇高二月考] 在高二某班级中，有 4 名同学要参加足球、篮球、乒乓球三项比赛，每人仅选择一项参加，其中甲同学无法参加足球比赛，则不同的参加方法种数为　(　)

A. 12　　B. 16

C. 54　　D. 81

**变式** (1)若 4 名学生报名参加数学、计算机、航模兴趣小组，每人选报 1 项，则不同的报名方式有　(　)

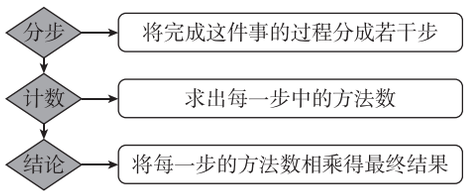
A. $3^4$ 种　　B. $4^3$ 种

C. $3\times2\times1$ 种　　D. $4\times3\times7$ 种

(2)人们习惯把最后一位是 6 的多位数叫作“吉祥数”，则无重复数字的四位“吉祥数”(首位不能是零)共有_____个.

**[素养小结]**

利用分步乘法计数原理计数时的解题流程




**[提醒]** (1)要按照事件发生的过程合理分步.

(2)分步时要注意各步骤互相依存，不能遗漏步骤，只有各步骤都完成才算完成这件事.

## ◆ 要点三　两个计数原理的简单应用

### 典例解析

**例 3** [教材 P5 例 3 改编] 高二(1)班有 6 人参加数学小组，(2)班有 5 人参加物理小组，(3)班有 4 人参加化学小组.

(1)选其中 1 人担任数理化小组组长，有多少种不同的选法？

(2)每班选 1 人参加全国数理化竞赛，有多少种不同的选法？

(3)选取其中 2 人参加不同的学科竞赛，有多少种不同的选法？

**变式** [2026·山东菏泽高二期中] 高二(1)班、(2)班、(3)班分别有7,5,9名学生参加创新技能大赛笔试.

(1)如果选一人当组长,那么有多少种不同的选法?

(2)如果老师任组长,每班选一名副组长,那么有多少种不同的选法?

(3)如果推选2名学生参赛,要求这2人来自不同的班级,那么有多少种不同的选法?

[素养小结]

利用两个计数原理解题时的三个注意点

(1)当题目无从下手时,可考虑要完成的这件事是什么,即怎样做才算完成这件事,然后给出完成这件事的一种或几种方法,从这几种方法中归纳出解题方法.

(2)分类时标准要明确,做到不重不漏,有时要恰当画出示意图或树状图,使问题的分析更直观、清楚,便于探索规律.

(3)综合问题要考虑是先分类还是先分步.

## 第2课时　两个计数原理的综合应用

### 课堂明新知

知识导学　典例探究

### ◆ 要点一　数字组数问题

**典例解析**

**例1** 用0,1,2,3,…,9这十个数字.

(1)可组成多少个三位数?

(2)可组成多少个无重复数字的三位数?

(3)可组成多少个小于500且没有重复数字的自然数?

**变式** [2026·杭州浙大附中高二月考] 用0,1,3,6四个数组成没有重复数字的四位数,将这些四位数从小到大排列,那么第10个四位数是 (　　)

A. 3160　　B. 3016

C. 3601　　D. 3610

[素养小结]

解决组数问题的方法

(1)对于组数问题,一般按特殊位置(一般是末位和首位)优先的方法分类或分步完成;如果正面分类较多,可采用间接法从反面求解.

(2)解决组数问题,应特别注意其限制条件,有些条件是隐藏的,要善于挖掘.组数时,要注意特殊元素、特殊位置优先的原则.

[提醒] 数字"0"不能排在两位数字或两位数字以上的数的最高位.

## ◆ 要点二　选(抽)取分配问题

### 典例解析

**例2** 现有甲、乙、丙、丁、戊五类不同的书,放入四个窗格的书架中.若甲、乙两类书必须放在同一窗格,丙、丁、戊分别放到剩余三个窗格内,共有多少种放法?

**变式** (1)高三年级的三个班级到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践,其中甲工厂必须有班级去,则不同的分配方案共有 (　　)

A. 16种　　B. 18种

C. 37种　　D. 48种

(2)将2名女生和3名男生分配到两个不同的兴趣小组,要求每个兴趣小组分配男生、女生各1人,则不同的分法种数为_____.

[素养小结]

解决抽取(分配)问题的方法

(1)当涉及对象数目不大时,一般选用枚举法、树状图法、框图法或者图表法.

(2)当涉及对象数目较大时,一般有两种方法:

①直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理.一般地,若抽取是有顺序的,则按分步进行;若按对象特征抽取,则按分类进行.

②间接法:去掉限制条件计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

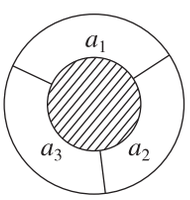
## ◆ 要点三　涂色(种植)问题

### 典例解析

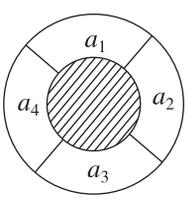
**例3** 一个同心圆形花坛分为两部分,中间小圆部分种植草坪和绿色灌木,周围的圆环分为$n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$等份,种植红、黄、蓝三种颜色不同的花,要求相邻两部分种植不同颜色的花.

(1)如图①,圆环分成3等份,分别为$a_1,a_2,a_3$,则有多少种不同的种植方法?

(2)如图②,圆环分成4等份,分别为$a_1,a_2,a_3,a_4$,则有多少种不同的种植方法?



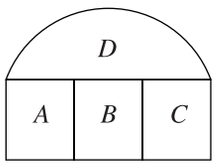
①



②

**变式** (1)用 4 种不同的颜色涂在四棱锥的各个面上,要求相邻两面不同色,有_____种不同的涂法.

(2)如图,提供 4 种不同的颜色给图中 $A,B,C,D$ 四块区域涂色,若相邻的区域不能涂同一种颜色,则不同的涂法共有_____种.




[素养小结]

求解涂色(种植)问题一般是直接利用两个计数原理求解,常用方法有:

(1)按区域的不同以区域为主分步计数,用分步乘法计数原理分析;

(2)以颜色(种植作物)为主分类讨论,适用于"区域、点、线段"问题,用分类加法计数原理分析;

(3)对于空间中的涂色问题,将空间问题平面化,转化为平面区域涂色问题.

# 6.2 排列与组合

## 6.2.1 排列

【学习目标】

1. 通过实例,理解排列的概念,能准确判断排列问题.
2. 能用列举法、树状图写出一个排列问题的所有排列.
3. 能用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决简单的排列问题.

### 课堂明新知

知识导学 典例探究

### ◆ 要点一 排列的概念

(1)排列的定义:一般地,从 $n$ 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,并按照_____排成一列,叫作从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个排列.

(2)两个排列相同的充要条件:两个排列的_____完全相同,且元素的_____也相同.

注意:由排列的定义可知,排列与元素的顺序有关,这也是判断是否为排列问题的主要依据.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)1,2,3 与 3,2,1 为同一排列. (　　)

(2)在一个排列中,同一个元素不能重复出现. (　　)

(3)从 1,2,3,4 中任选两个数字,就组成一个排列. (　　)

(4)从 5 名同学中任选 2 名同学分别参加数学和物理竞赛的所有不同的选法是一个排列问题. (　　)

### 典例解析

**例 1** 判断下列问题是否是排列问题,并说明理由.

(1)从 1,2,3,4 四个数字中,任选两个做加法,其结果有多少种不同的可能?

(2)从 1 到 10 这十个自然数中任取两个不同的数组成直角坐标平面内的点的坐标,可得到多少个不同的点的坐标?

(3)从十名同学中任选两名同学去学校开座谈会,有多少种不同的选取方法?

(4)某商场有四个大门,若从一个大门进去,购买物品后,再从另一个大门出来,不同的出入方式有多少种?

**变式** [2026·河北邯郸高二期中] 从甲、乙、丙三人中选两人站成一排的所有站法为 （ ）

A. 甲乙，乙甲，甲丙，丙甲

B. 甲乙，丙乙，丙甲

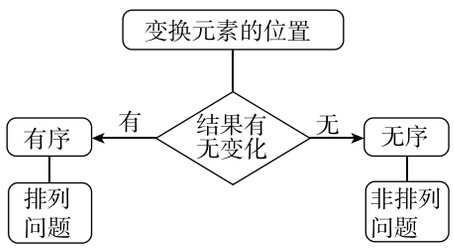
C. 甲乙，甲丙，乙甲，乙丙，丙甲，丙乙

D. 甲乙，甲丙，乙丙

[素养小结]

1. 排列中的注意事项：(1)互异性；(2)有序性.

2. 技巧突破




## ◆ 要点二　用树状图解决排列中的列举问题

### 典例解析

**例 2** (1)从 1，2，3，4 四个数字中任取两个数字组成没有重复数字的两位数，一共可以组成多少个？

(2)从语文书、数学书、英语书、物理书 4 本书中任意取出 3 本分给甲、乙、丙三人，每人一本，试将所有不同的分法列举出来.

(3)$A$，$B$，$C$，$D$ 四人站成一排，其中 $A$ 不站排头，一共有多少种不同的站法？

**变式** (1)由 1，2，3，4 这四个数字组成的首位数字是 1，且恰有三个相同数字的四位数有 （ ）

A. 9 个　　B. 12 个

C. 15 个　　D. 18 个

(2)元旦来临之际，某寝室四名同学各有一张贺卡，并且要送给该寝室的其中一名同学，每人都必须得到一张，则不同的送法有 （ ）

A. 6 种　　B. 9 种

C. 11 种　　D. 23 种

[素养小结]

利用树状图法解决简单排列问题的适用范围及策略

(1)适用范围：树状图在解决排列元素个数不多的问题时，是一种比较有效的表示方式.

(2)策略：在操作中先将元素按一定顺序排出，然后以先安排哪个元素为分类标准进行分类，再安排第二个元素，并按此元素分类，依次进行，直到完成一个排列，这样能做到不重不漏，然后再按树状图写出排列.

## ◆ 要点三　用计数原理解决排列问题

### 典例解析

**例 3** (1)[教材 P16 例 1 改编] 从 7 本不同的书中选出 3 本送给 3 位同学，每人一本，不同的选法种数是 （ ）

A. $3^7$　　B. $7^3$

C. 21　　D. 210

(2)从 $A$，$B$，$C$ 等 7 人中选 5 人排成一排，若 $A$ 必须在内，则有_____种排法.(用数字作答)

**变式** 某中学环保社团计划利用社团前空地栽种五棵高矮不一样的树木，其中最高和最矮的两棵树木种在两头的方法有 （ ）

A. 6 种　　B. 12 种

C. 24 种　　D. 48 种

[素养小结]

1. 先判断是不是排列问题.

2. 在排列个数较多且明确需要完成的事情的情况下，可采用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决.

# 6.2.2 排列数

## 第1课时 排列数及简单应用

【学习目标】

1. 能利用计数原理推导排列数公式.理解排列数公式,能利用排列数公式进行计算和证明.
2. 能应用排列知识解决实际问题.

## 课堂明新知

知识导学 典例探究

### ◆ 要点一 用排列数公式进行化简与证明

| | |
|---|---|
| 排列数定义及表示 | 把从 $n$ 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有_____,叫作从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的排列数,用符号 $A_n^m$ 表示 |
| 全排列的概念 | 把 $n$ 个不同的元素_____的一个排列 |
| 阶乘的概念 | 正整数1到 $n$ 的连乘积,叫作 $n$ 的阶乘,用 $n!$ 表示 |
| 排列数公式 | $A_n^m=$_____ |
| | 阶乘式 $A_n^m=$_____$(n,m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$ |
| 特殊情况 | $A_n^n=$_____,$0!=$_____ |

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)从 $n(n\geqslant 2)$ 个人中选出2个人,分别从事两项不同的工作,可以用 $A_n^2$ 表示. (　　)

(2)集合 $P=\{x\mid x=A_4^m,m\in\mathbf{N}^*\}$,则 $m$ 的取值个数是4. (　　)

(3)将8名同学排成两排,每排4人,则不可以用 $A_8^8$ 表示. (　　)

(4)$n!=\dfrac{(n+1)!}{n+1}$. (　　)

(5)$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$. (　　)

### 典例解析

**例1** [教材P19例3改编]计算:(1)$A_{10}^4$;(2)$A_9^4-A_9^3$;(3)$\dfrac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$;(4)$\dfrac{A_{10}^2A_7^7}{10!}$.

**变式** (1)$A_6^6-6A_5^5+5A_4^4=$_____.

(2)$(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-15)(x\in\mathbf{N}_+,x>15)$可表示为 (　　)

A. $A_{x-2}^{13}$　　B. $A_{x-2}^{14}$

C. $A_{x-15}^{13}$　　D. $A_{x-15}^{14}$

**例2** (1)解方程:$A_{2n}^3=28A_n^2$.

(2)求证:$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}(m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant m\geqslant 2)$.

**变式** (1)满足 $3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$ 的 $x$ 的值为_____.

(2)求证:$A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$.

[素养小结]

1. 排列数的计算方法

(1)排列数的计算主要是利用排列数的乘积公式进行,连续正整数的积可以写成某个排列数;

(2)应用排列数公式的阶乘形式时,一般写出它们的式子后,再提取公因式.

2. 排列数的化简与证明技巧

应用排列数公式可以对含有排列数的式子进行化简和证明,化简的过程中要对排列数进行变形,并要熟悉排列数之间的内在联系.解题时要灵活地运用如下变式:

①$n!=n(n-1)!$;②$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$;

③$n\cdot n!=(n+1)!-n!$;④$\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$.

[提醒] 在解含有排列数的方程或不等式时,必须注意 $A_n^m$ 中 $m\in\mathbf{N}^*$,$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$ 这些限制条件.在解出方程或不等式后,要进行检验,把不合题意的解舍掉.

## ◆ 要点二　排列数公式的简单应用

### 典例解析

**例 3** (1)将 5 个不同的球放入 8 个不同的盒子中,每个盒子里至多放 1 个球,则不同的放法有(　　)

A. $A_8^5$ 种　　B. $C_8^5$ 种

C. $5^8$ 种　　D. $8^5$ 种

(2)[2026·安徽宿州高二阶段练] 由 1,2,3,4 四个数字组成无重复数字的四位偶数有(　　)

A. $4^4$ 个　　B. 24 个　　C. 12 个　　D. 6 个

**变式** (1)[教材 P20T3 改编] 10 个人走进只有 6 把不同椅子的屋子,若每把椅子必须且只能坐一人,则不同坐法的种数为(　　)

A. 6　　B. $A_{10}^6$　　C. $10^6$　　D. $6^{10}$

(2)[2026·山西临汾高二期中] 某班周一上午共有四节课,计划安排语文、数学、美术、体育各一节,要求数学不排在第一节和第四节,则该班周一上午不同的排课方案共有(　　)

A. 24 种　　B. 18 种

C. 12 种　　D. 6 种

# 第 2 课时　排列的综合问题

【学习目标】

进一步理解排列的概念,掌握一些排列问题的常用解决方法.

## 课堂明新知

知识导学　典例探究

## ◆ 要点一　特殊元素(位置)问题

### 典例解析

**例 1** 有 5 名同学站成一排拍照.

(1)甲、乙必须站一起,共有多少种不同的排法?

(2)最左端只能排甲或乙,且最右端不能排甲,共有多少种不同的排法?

(3)甲必须站正中间,并且乙、丙不能相邻,共有多少种不同的排法?

**变式** [2026·湖北十堰高二月考] 一场晚会有4个演唱节目和2个舞蹈节目,要求排出一个节目单.

(1)2个舞蹈节目不排在开始和结尾,有多少种排法?

(2)前三个节目要有舞蹈节目,有多少种排法?

[素养小结]

处理有特殊元素的排列问题常从以下两方面入手:

(1)从特殊元素入手,先给特殊元素安排位置,再把其他元素安排在其他位置上;

(2)从位置入手,先安排特殊位置,再安排其他位置.

如果直接分类情况较多,那么可采用间接法求解.

## ◆ 要点二　相邻与不相邻问题

### 典例解析

**例2** 甲、乙、丙、丁、戊五名同学站成一排拍照.

(1)甲、乙两人不相邻的站法共有多少种?

(2)甲不站排头或排尾,且甲、乙两人相邻的站法共有多少种?

**变式** [2026·广东清远高二期中] 有4名男同学和3名女同学(甲、乙、丙)站成一排.

(1)3名女同学必须排在一起,有多少种不同的排法?

(2)任何2名女同学都不相邻,有多少种不同的排法?

(3)甲、乙两人相邻,但都不与丙相邻,有多少种不同的排法?

[素养小结]

(1)元素相邻问题一般用“捆绑法”,先把相邻的若干个元素“捆绑”为一个大元素与其余元素全排列,然后再松绑,将这若干个元素内部全排列.

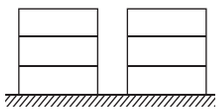
(2)元素不相邻问题一般用“插空法”,先将不相邻元素以外的“普通”元素全排列,然后在“普通”元素之间及两端形成的空中插入不相邻元素.

## ◆ 要点三　定序问题

**典例解析**

**例 3**　将 $A,B,C,D,E$ 这 5 个字母排成一列，要求 $A,B,C$ 在排列中的顺序为“$A,B,C$”或“$C,B,A$”（可以不相邻），有多少种不同的排列方法？

**变式**　[2026·浙江绍兴高二期末] 如图所示，某码头有两堆集装箱，一堆 3 个，另一堆也是 3 个，现需要全部装运，每次只能从其中一堆取最上面的一个集装箱，则在装运过程中不同取法的种数是（　　）



A. 12　　B. 16

C. 20　　D. 24

**[素养小结]**

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是确定的，解决这类问题的基本方法有两个：

(1)整体法，即若有$(m+n)$个元素排成一列，其中 $m$ 个元素之间的先后顺序确定不变，将这$(m+n)$个元素排成一列，有 $A_{m+n}^{m+n}$ 种不同的排法；然后任取一个排列，固定其他 $n$ 个元素的位置不动，把这 $m$ 个元素交换顺序，有 $A_m^m$ 种排法，其中只有一个排列是我们需要的，因此共有$\dfrac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$种满足条件的不同排法.

(2)插空法，即 $m$ 个元素之间的先后顺序确定不变，因此先排这 $m$ 个元素，只有一种排法，然后把剩下的 $n$ 个元素分类或分步插入由以上 $m$ 个元素形成的空中.

# 6.2.3　组合

# 6.2.4　组合数

## 第 1 课时　组合与组合数公式

【学习目标】

1. 通过实例，理解组合的概念，并能写出一些简单问题的所有组合.
2. 理解组合数的概念，能利用计数原理推导组合数公式.
3. 学会运用组合的概念，分析简单的实际问题.
4. 会应用组合数公式及性质求值、化简和证明.
5. 能解决有关组合的实际问题.

## 课堂明新知

知识导学　典例探究

## ◆ 要点一　组合的概念

1. 组合的定义：一般地，从_____个不同元素中取出_____$(m\leqslant n)$个元素_____，叫作从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个组合.

2. 排列与组合的异同点：

| | 排列 | 组合 |
|---|---|---|
| 相同点 | 从 $n$ 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素 | |
| 不同点 | 与元素的顺序_____ | 与元素的顺序_____ |

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)两个组合相同的充要条件是其中的元素完全相同. (　　)

(2)从 $a,b,c$ 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 $a,b$ 或 $a,c$ 或 $b,c$. (　　)

(3)“从甲、乙、丙3名同学中选出2名去参加某两个乡镇的社会调查,有多少种不同的选法”是组合问题. (　　)

(4)“现将4枚相同的抗战胜利纪念币送给10人中的4人留念,有多少种送法”是排列问题. (　　)

(5)“$abc$”与“$bca$”是相同的排列,不是相同的组合. (　　)

## 典例解析

**例1** 判断下列问题是组合问题还是排列问题.

(1)若集合 $A=\{a,b,c,d\}$,则集合 $A$ 的含有3个元素的子集有多少个?

(2)某铁路线上有4个车站,则这条铁路线上需准备多少种车票?

(3)从10个人中选出3个人为代表去开会,有多少种选法?

(4)三个人去做5种不同的工作,每人做1种,有多少种分工方法?

(5)把3本相同的书分给5名学生,每人最多得一本,有多少种分配方法?

**变式** (多选题)下列问题是组合问题的是 (　　)

A. 把5本不同的书分给5名学生,每人一本

B. 从7本不同的书中取出5本给某个同学

C. 10个人相互发微信,共发几次微信

D. 10个人互相通一次电话,共通了几次电话

[素养小结]

区分排列与组合的方法

首先弄清楚事件是什么,区分的标志是有无顺序,而区分有无顺序的方法是:把问题的一个选择结果写出来,然后交换这个结果中任意两个元素的位置,看是否会产生新的变化,若有新变化,则说明有顺序,是排列问题;若无新变化,则说明无顺序,是组合问题.

## ◆ 要点二　用组合数公式进行化简与证明

| | | |
|---|---|---|
| 组合数定义 | 从 $n$ 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的_____的个数,叫作从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的组合数 | |
| 表示法 | _____ | |
| 组合数公式 | 乘积式 | $C_n^m=$_____$=$_____ |
| | 阶乘式 | $C_n^m=$_____ |
| 性质 | $C_n^m=$_____,$C_{n+1}^m=$_____ | |
| 备注 | ①$n,m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$;②规定:$C_n^0=1$ | |

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)从 $a,b,c$ 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 $C_3^2$. (　　)

(2)$C_5^3=5\times4\times3=60$. (　　)

(3)从1,3,5,7中任取两个数相乘可得 $C_4^2$ 个积. (　　)

## 典例解析

**例2** (1)计算:$C_{10}^4-C_7^3\cdot A_3^3$.

(2)计算:$C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}$.

(3)计算:$C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{10}^3$.

**例 3** [教材 P25T2 改编] 证明:(1)$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$;(2)$C_{m+2}^n=C_m^n+2C_m^{n-1}+C_m^{n-2}$.

**变式** (1)计算:$C_n^{5-n}+C_{n+1}^{9-n}$.

(2)[2025·山东济南高二期末] 证明:$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$,其中 $k,n\in\mathbf{N}^*$,$1\leqslant k\leqslant n$,$n\geqslant 2$.

[素养小结]

进行组合数的相关计算时,注意以下几点:

(1)像排列数公式一样,公式 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 一般用于计算;而公式 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ 及 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$ 一般用于证明、解方程(不等式)等.

(2)要注意公式 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$ 的逆向运用,如例 2(1)中可利用"$C_7^3A_3^3=A_7^3$"简化计算过程.

(3)在解决与组合数有关的问题时,要注意隐含条件"$m\leqslant n$ 且 $m,n\in\mathbf{N}^*$"的运用.

(4)例 3(1)所推导的结论"$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$"以及它的变形公式是非常重要的公式,应熟练掌握.

## ◆ 要点三　简单的组合问题

### D 典例解析

**例 4** [2026·安徽安庆高二期中] 从 3 名男同学和 5 名女同学中选择 4 名同学去参加志愿者活动.

(1)共有多少种不同的选法?

(2)既有男同学又有女同学的选法有多少种?

**变式** [教材 P25 例 7 改编] 从含有 3 件次品的 10 件产品中,任意抽取 4 件进行检验.

(1)抽出的产品都是合格品的抽法有多少种?

(2)抽出的产品中恰好有 2 件是次品的抽法有多少种?

(3)抽出的产品中至多有 2 件是次品的抽法有多少种?

[素养小结]

简单的组合问题的解题思路及注意点:

(1)解简单的组合问题时,首先要判断它是不是组合问题,排列问题与元素顺序有关,而组合问题与元素的顺序无关.

(2)在分类和分步时,一定要注意有无重复或遗漏.

## 第 2 课时　组合的综合应用

### 课堂明新知

知识导学　典例探究

### ◆ 要点一　有限制条件的组合问题

**典例解析**

**角度 1　“含有”与“至少”问题**

**例 1**　有男运动员 6 名,女运动员 4 名,其中男、女队长各 1 名.选派 5 人外出比赛,按下列要求分别有多少种选法?

(1)男运动员 3 名,女运动员 2 名;

(2)至少有 1 名女运动员;

(3)至少有 1 名队长;

(4)既有队长,又有女运动员.

**变式**　蓝天救援队有男救援员 8 名,女救援员 4 名,现选派 5 名救援员参加一项救援.

(1)若男救援员甲与女救援员乙必须参加,共有多少种不同的选法?

(2)若救援员甲、乙均不能参加,共有多少种不同的选法?

(3)若至少有一名男救援员和一名女救援员参加,共有多少种不同的选法?

[素养小结]

有限制条件的抽(选)取问题,主要有两类:

(1)“含”与“不含”问题,常用直接分步法,即“含”的先取出,“不含”的可把所指元素去掉再取,分步计数.

(2)“至多”与“至少”问题,有两种解题思路:一是直接分类法,但注意分类要不重不漏;二是间接法,注意找准对立面,确保不重不漏.

**角度2 “多面手”问题**

**例2** 有11名外语翻译人员,其中5名英语翻译员,4名日语翻译员,另外2名英语、日语都精通,从中找出8人,使他们可以组成2个翻译小组,其中一组4人翻译英语,另外一组4人翻译日语,且这2个小组能同时工作,则这样的8人名单共有多少种?

**变式** 有6名工人,其中2人只会电工,3人只会木工,还有1人既会电工又会木工,若要选出电工2人、木工2人,且这4人能同时工作,则共有_____种不同的选法.

[素养小结]

多面手问题以元素作为分析对象,按照选用几个多面手,多面手做什么建立分类讨论的标准,并且要注意做到不重复不遗漏.

## ◆ 要点二 分组、分配问题

### D 典例解析

**角度1 不同元素分组、分配问题**

**例3** 按下列要求分配6本不同的书,分别有多少种不同的分配方法?

(1)分成3份,1份1本,1份2本,1份3本;

(2)甲、乙、丙三人中,一人得1本,一人得2本,一人得3本;

(3)平均分成3份,每份2本;

(4)平均分配给甲、乙、丙三人,每人2本;

(5)分成3份,1份4本,另外2份每份1本;

(6)甲、乙、丙三人中,一人得4本,另外两人每人得1本.